

УДК 532.685

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАЛЕЖИ ВЫСОКОВЯЗКОЙ НЕФТИ С ЗАМКНУТЫМ РЕЗЕРВУАРОМ

*М.Ю. Гарнышев, А.Г. Егоров, А.Б. Мазо*

### Аннотация

Предложены математические модели гидродинамического взаимодействия нефтяного пласта с замкнутым резервуаром. Показано, что они позволяют адекватно воспроизводить аномальные кривые восстановления давления на некоторых месторождениях Волго-Уральской нефтегазоносной провинции.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, теория фильтрации, сложнопостроенная залежь, высоковязкая нефть, замкнутый резервуар, кривые восстановления давления.

---

### Введение

Классические кривые восстановления давления (КВД) в эксплуатационной скважине после ее остановки имеют логарифмический вид [1, 2]. Именно этот закон используется в методиках оценки проницаемости и упругоёмкости пласта по КВД [3]. Однако ряд прямых пьезометрических наблюдений на месторождениях Волго-Уральской нефтегазоносной провинции свидетельствует о том, что на некоторых скважинах КВД могут заметно отличаться от классических [4]. Более того, для одной и той же скважины восстановление давления в начальный период эксплуатации может происходить по классическому закону, а уже через несколько лет экспериментальные КВД характеризуются чрезвычайно медленным темпом роста и зависимостью  $\Delta p(t)$ , близкой к линейной.

В работе [4] такие аномальные КВД в скважине объясняются наличием в месторождении, помимо основного коллектора, ряда изолированных резервуаров (линз). Роль линз в гидродинамике нефтяного пласта проиллюстрируем на следующем модельном примере.

Вертикальная скважина вскрывает как пласт, так и линзу (см. рис. 1). Медленные процессы перераспределения давления при эксплуатации месторождения практически не зависят от наличия линзы, поскольку в силу ее гидродинамической изолированности и небольшого объема давление в линзе меняется синхронно с давлением в скважине. Иначе обстоит дело в быстрых переходных процессах, которые происходят при пуске и остановке скважины либо при периодическом режиме добычи. В этих случаях линзы играют демпфирующую роль, обусловленную обменом жидкостью между основным коллектором и линзой через ствол скважины. Это, в частности, препятствует быстрому росту давления после остановки скважины.

Отмеченные выше качественные различия в виде КВД для одной скважины в разные периоды разработки объясняются изменением подвижности жидкости, заполняющей линзу. До начала разработки и пласт, и линза заполнены преимущественно высоковязкой нефтью. В процессе добычи в линзе устанавливается пониженное давление, что приводит к фильтрации воды из расположенной ниже

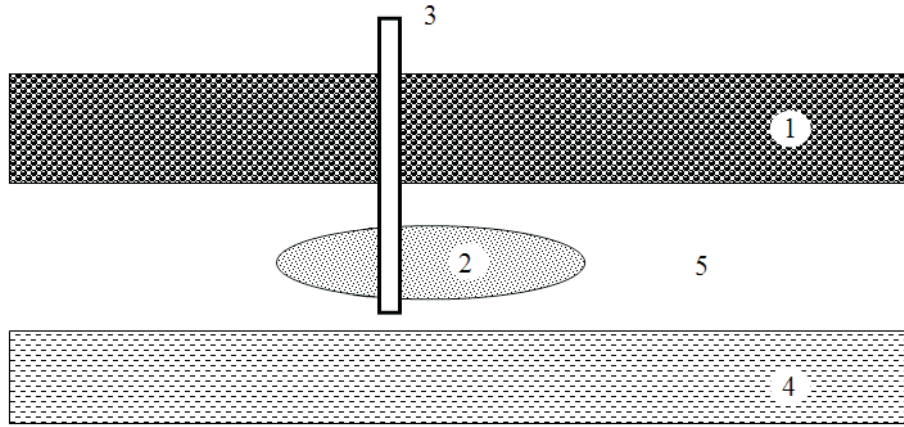


Рис. 1. Схематическое изображение объекта исследования: 1 – основной коллектор, 2 – линза, 3 – скважина, 4 – водонасыщенная толща, 5 – плотные породы

водонасыщенной толщи (см. рис. 1) через плотные породы в линзу и в конечном итоге к замещению нефти водой, вязкость которой значительно ниже. Как будет показано ниже, вязкость флюида в линзе принципиально влияет на ее демпфирующие свойства.

### 1. Математическая модель

Будем считать, что и пласт, и линза имеют форму цилиндров, а добывающая скважина располагается на их общей оси. В основу математической модели положим известные уравнения пьезопроводности [1, 2], записанные для радиально-симметричной схемы фильтрации и осредненные по толщине  $H^{(i)}$ :

$$\frac{\partial p^{(i)}}{\partial t} - \frac{\kappa^{(i)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^{(i)}}{\partial r} \right) = 0, \quad t > 0, \quad r_w < r < R^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где  $p$  – превышение давления над его стационарным распределением в начальный момент времени  $t$ ;  $r$  – радиальная координата;  $r_w$  – радиус скважины;  $\kappa = \sigma/\beta$  – пьезопроводность;  $\beta$  – упругость;  $\sigma = k/\mu$  – гидропроводность;  $k$  – проницаемость;  $\mu$  – вязкость;  $R^{(1)}$  – радиус контура питания пласта;  $R^{(2)}$  – радиус линзы. Здесь и далее индексами «(1)» и «(2)» обозначены параметры основного коллектора и линзы. При записи граничных условий учтено, что линза гидродинамически изолирована, а давления на скважине в пласте и линзе одинаковы:

$$\begin{aligned} r = R^{(1)} : \quad p^{(1)} &= 0; \\ r = R^{(2)} : \quad \sigma^{(2)} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} &= 0; \\ r = r_w : \quad p^{(1)} &= p^{(2)} = p_w. \end{aligned} \quad (2)$$

Значение забойного давления  $p_w$  в (2) заранее неизвестно и подлежит определению в ходе решения задачи. Суммарный дебит добывающей скважины считается заданным:

$$Q(t) = Q_0 q(t), \quad Q_0 = \text{const} > 0, \quad q(t) \in [0, 1] \quad (3)$$

В формуле (3) функция  $q(t)$  моделирует включение и отключение скважины. В каждый момент времени дебит  $Q$  складывается из притоков к скважине из

основного коллектора  $Q^{(1)}$  и линзы  $Q^{(2)}$ , а также дополнительного расхода  $Q^h$ , обусловленного изменением уровня  $h$  жидкости в скважине. Связь величины  $Q^h$  с давлением  $p_w = \rho gh$  выражает простое соотношение

$$Q^h = \pi r_w^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi r_w^2}{\rho g} \frac{dp_w}{dt},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости в скважине;  $g$  – гравитационное ускорение. Баланс потоков флюида в скважине  $Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^h$  приводит к дополнительному граничному условию для определения забойного давления:

$$r = r_w : 2\pi r_w \left( \sigma^{(1)} H^{(1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} + \sigma^{(2)} H^{(2)} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} \right) + \frac{\pi r_w^2}{\rho g} \frac{dp_w}{dt} = Q(t). \quad (4)$$

Начальные условия имеют вид:

$$t = 0 : p^{(1)} = p^{(2)} = 0. \quad (5)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \bar{r}, \bar{r}_w, \bar{R}^{(i)} &= \frac{r, r_w, R^{(i)}}{L}, \quad L = \sqrt{t_0 \kappa^{(1)}}; \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}; \\ \bar{p}^{(i)} &= \frac{p^{(i)}}{p_0}, \quad p_0 = \frac{Q_0}{2\pi H^{(1)} \sigma^{(1)}}; \\ \eta &= \frac{\beta^{(1)} k^{(2)}}{\beta^{(2)} k^{(1)}} \frac{1}{K_\mu}, \quad \xi = \frac{k^{(2)}}{k^{(1)}} \frac{K_H}{K_\mu}, \quad K_\mu = \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}}, \quad K_H = \frac{H^{(2)}}{H^{(1)}}; \\ \gamma &= \frac{r_w^2}{2\rho g H^{(1)} \beta^{(1)} L^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда задача (1)–(5) примет вид (черта над безразмерными величинами опущена)

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} \right) = 0, \quad t > 0, \quad r_w < r < R^{(1)}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} \right) = 0, \quad t > 0, \quad r_w < r < R^{(2)}; \quad (8)$$

$$r = r_w : \begin{cases} p^{(1)} = p^{(2)}, \\ r \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} + \xi r \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} + \gamma \frac{\partial p}{\partial t} = q(t). \end{cases} \quad (9)$$

$$r = R^{(1)} : p^{(1)} = 0; \quad r = R^{(2)} : \frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} = 0. \quad (10)$$

$$t = 0 : p^{(1)} = p^{(2)} = 0. \quad (11)$$

В формулах (6) в качестве характерного времени  $t_0$  выбран период изменения функции  $q(t)$ , который для циклического режима работы скважины составляет около 10 сут, при этом пространственный масштаб  $L = \sqrt{\kappa t_0}$  не превышает сотни метров. Поскольку радиус контура питания  $R^{(1)}$  оценивается величиной в сотни и тысячи метров, а радиус скважины  $r_w$  – величиной порядка 10 см, то для соответствующих безразмерных параметров имеем оценки  $\bar{R}^{(1)} \gg 1$ ,  $\bar{r}_w \ll 1$ .

Итак, математическая модель (7)–(11) содержит шесть безразмерных параметров:  $\gamma$ ,  $\bar{r}_w$ ,  $\bar{R}^{(1)}$ ,  $\bar{R}^{(2)}$ ,  $\eta$  и  $\xi$ ; параметр  $\gamma$  характеризует емкостные свойства скважины; три параметра  $\bar{R}^{(2)}$ ,  $\eta$  и  $\xi$  определяют линзу; параметр  $\bar{R}^{(1)}$ , как правило, можно положить равным бесконечности. Если фильтрационные свойства пласта и линзы одинаковы:  $k^{(1)} = k^{(2)}$ ,  $\beta^{(1)} = \beta^{(2)}$ , то  $\eta = K_\mu^{-1}$ ,  $\xi = K_H/K_\mu$ , и влияние линзы на решение задачи будет определяться ее относительными радиусом  $R^{(2)}$  и толщиной  $K_H$ , а также вязкостью  $K_\mu$  заполняющего линзу флюида.

Очевидно, в процессе разработки месторождения два параметра –  $R^{(2)}$  и  $K_H$  – остаются постоянными, поэтому причиной трансформации КВД в ходе эксплуатации может служить лишь изменение  $K_\mu$ . Как отмечалось во введении, это изменение является следствием постепенного замещения в линзе высоковязкой нефти водой из подстилающей водонасыщенной толщи через плохопроницаемую «подошву». Время  $T$  замещения нефти водой можно оценить, используя простейшую формулу для скорости фильтрации воды через «подошву» с толщиной  $H_b$  и проницаемостью  $k_b$ :

$$v_b = \frac{H^{(2)}}{T} = \frac{k_b}{\mu_w} \frac{\Delta p}{H_b}.$$

Полагая толщины  $H_b = H^{(2)} = 3$  м, вязкость воды  $\mu_w = 10^{-3}$  Па·с, депрессию  $\Delta p = 10^7$  Па, проницаемость  $k_b = 1.5 \cdot 10^{-17}$  м<sup>2</sup>, получаем  $T \approx 6 \cdot 10^7$  с  $\approx 2$  года, что согласуется с временем, когда было экспериментально зафиксировано изменение формы КВД с логарифмической на линейную [4]. В рамках математической модели (7)–(11) данная трансформация может быть получена путем изменения параметра  $K_\mu$  от единицы для начального периода разработки до  $K_\mu = 0.01$  через несколько лет эксплуатации.

## 2. Численное решение задачи

**Метод решения.** Задача (7)–(11) решается методом конечных разностей [5] на сетках, сгущающихся к точке  $r = r_w$  по степенному закону. Для уравнений (7) и (8) с граничными условиями (10) на внешних границах и условием  $p^{(1)}(r_w) = p^{(2)}(r_w) = p_w$  на скважине применялись стандартные чисто неявные разностные схемы. Отметим лишь, что аппроксимация производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial r} \left( r_w + \frac{h_1^{(i)}}{2} \right) &\sim \sigma^{(i)} \frac{p_1^{(i)} - p_0^{(i)}}{h_1^{(i)}}, \\ \sigma^{(i)} &= \frac{h_1^{(i)}}{\left( r_w + h_1^{(i)}/2 \right) \ln \left( 1 + h_1^{(i)}/r_w \right)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

в первом сеточном элементе ( $h_1^{(i)}$  – первый шаг сетки по  $r$ ) учитывает логарифмическую особенность поведения давления в окрестности скважины при малых  $r_w$  и обеспечивает достаточную точность решения даже на грубых сетках, когда  $h_1^{(i)}/r_w \gg 1$  [6]. Замыкает систему сеточных уравнений аппроксимация условий (9) при  $r = r_w$ :

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(1)} r_w \frac{p_1^{(1)} - p_w}{h_1^{(1)}} + \sigma_0^{(2)} \xi r_w \frac{p_1^{(2)} - p_w}{h_1^{(2)}} + \gamma \frac{p_w - \check{p}_w}{\tau} &= q, \\ p_0^{(1)} = p_0^{(2)} = p_w; \quad \sigma_0^{(i)} &= \frac{h_1^{(i)}}{r_w \ln \left( 1 + h_1^{(i)}/r_w \right)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

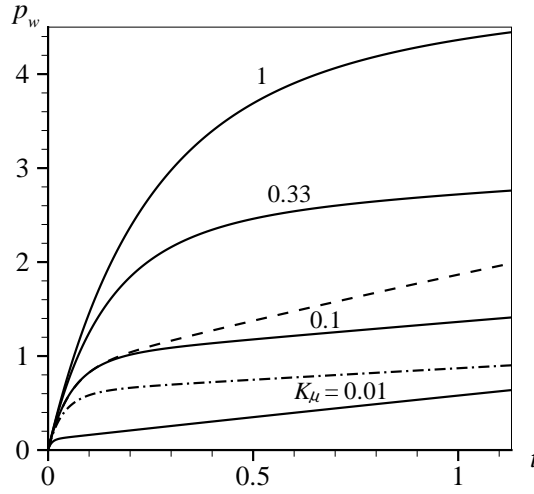


Рис. 2. Влияние отношения вязкостей и размеров линзы на вид КВД

Здесь  $\tau$  – шаг по времени;  $\tilde{p}_w = p_w(t - \tau)$ . Заметим, что множители  $\sigma_0^{(i)}$  в уравнении (13) обеспечивают сеточную аппроксимацию производных  $\partial p^{(i)} / \partial r$  при  $r \rightarrow r_w$ ; они не совпадают с  $\sigma^{(i)}$ , определенными в (12).

Для решения сеточных схем использовался метод прогонки [5]. Установлено, что достаточная точность решения задачи достигается уже на сетках с числом узлов порядка 50, при этом погрешность в определении давления на скважине не превышает 0.3%.

**Результаты расчетов.** Как упоминалось выше, причиной трансформации КВД служит изменение отношения вязкостей  $K_\mu$ . На рис. 2 представлены расчетные КВД для различных  $K_\mu$  при  $K_H = 0.58$ ,  $R^{(2)} = 2.6$  (во всех расчетах принимались значения  $r_w = 0.001$ ,  $R^{(1)} = 10$ ).

Расчеты показали, что увеличение относительных размеров линзы  $K_H$  и  $R^{(2)}$  приводит к снижению темпа восстановления давления в скважине. На рис. 2 для  $K_\mu = 0.1$  штриховая линия соответствует значениям  $K_H = 1$ ,  $R^{(2)} = 2.6$ , а штрихпунктирная –  $K_H = 0.58$ ,  $R^{(2)} = 1.5$ .

Для понимания характера гидродинамического взаимодействия пласта с линзой при пуске и остановке скважины полезно рассмотреть перетоки жидкости между линзой и коллектором. На рис. 3 они показаны при следующих параметрах модели:  $K_\mu = 0.1$ ,  $K_H = 1$ ,  $R^{(2)} = 1$ . Функция  $q(t) = 1 - h(t - t_0)$  в (9) моделировала включение скважины в момент  $t = 0$  и ее отключение в момент  $t = t_0 = 40$ ;  $h$  – функция Хевисайда.

Видно, что до остановки скважины при  $t < t_0$  и линза, и основной пласт отдавали жидкость, причем дебит линзы  $q^{(2)}$  падал после резкого подъема, а дебит коллектора  $q^{(1)}$  возрастал. После остановки скважины коллектор продолжает отдавать жидкость ( $q^{(1)} > 0$ ), которая в основном перетекает в линзу ( $q^{(2)} < 0$ ). Перетоки между пластом и линзой затухают с ростом  $t$ . Обратим внимание, что в отсутствие линзы поток из пласта  $q^{(1)}$  практически совпадает с общим дебитом  $q(t)$ . Различие в графиках  $q^{(1)}(t)$  и  $q(t)$  на рис. 3 отражает демпфирующую роль линзы.

Ту же роль линза играет и при периодическом режиме работы скважины. На рис. 4 приведены результаты численного эксперимента, в котором дебит скважины задавался ступенчатой функцией  $q$  с периодом  $T_0 = 1$ , размеры линзы

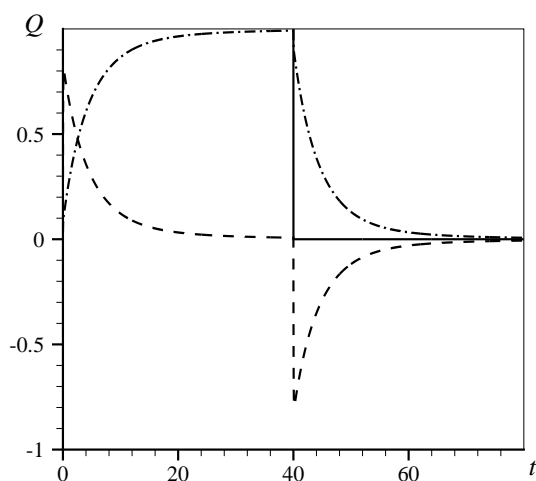


Рис. 3. Дебиты линзы (штриховая линия), основного коллектора (штрих-пунктирная линия) и общий дебит (сплошная линия) до и после остановки добывающей скважины

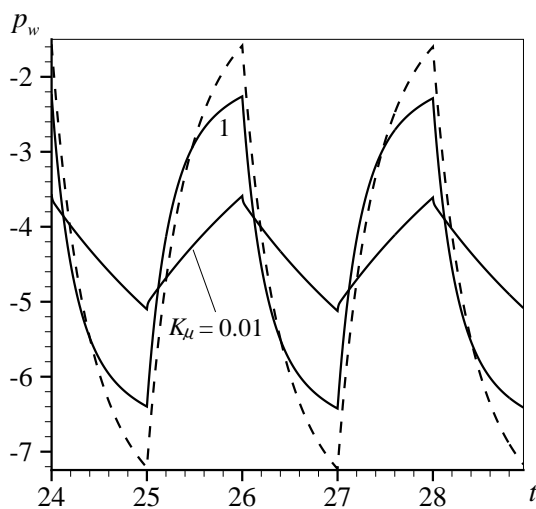


Рис. 4. Влияние параметра  $K_\mu$  на давление на скважине в случае периодического режима работы скважины. Штриховой линией показан случай отсутствия линзы

определялись параметрами  $K_H = 0.5$ ,  $R^{(2)} = 1$ , а относительная вязкость  $K_\mu$  флюида в линзе варьировалась. Видно, что при  $K_\mu = 1$  линза слабо влияет на изменение давления  $p_w(t)$ . При уменьшении  $K_\mu$  давление на скважине не успевает следовать за изменениями дебита. Это приводит к заметному снижению амплитуды колебаний функции  $p_w(t)$ .

Разработанная математическая модель использовалась для интерпретации аномальных КВД для скважины 5421 Черемуховского месторождения, опубликованных в [4]. Согласование расчетных и экспериментальных КВД показано на рис. 5. Его удалось достичь при следующих безразмерных параметрах линзы:  $K_H = 1$ ,  $R^{(2)} = 2.6$ . При этом расчетная кривая на рис. 5, а отвечает значению  $K_\mu = 0.74$ , а кривая на рис. 5, б —  $K_\mu = 0.01$ .

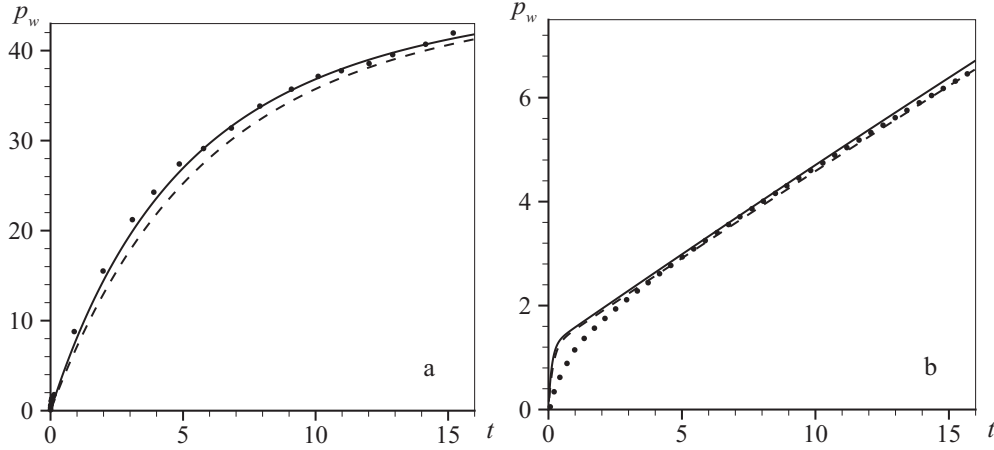


Рис. 5. Зависимость давления  $p_w$ , атм., от времени  $t$ , сут. Экспериментальные данные (маркеры), теоретические КВД, рассчитанные по полной модели (сплошная линия) и по упрощенной модели (штриховая линия):  $a$  – 2006 г.,  $b$  – 2008 г.

### 3. Упрощенная модель линзы

В представленной выше математической модели гидродинамического взаимодействия пласта и линзы через скважину предполагалось, что изолированный резервуар представляет собой цилиндрическое тело заданного радиуса  $R^{(2)}$  и толщины  $H^{(2)}$ . На практике информация о форме и размере линз недоступна. Кроме того, можно предположить, что демпфирующие свойства линзы в основном определяются двумя ее характеристиками: объемом  $V$  и вязкостью  $\mu^{(2)}$  заполняющего флюида. Ниже предлагается упрощенная модель фильтрационного взаимодействия, в которой линза представлена своими интегральными характеристиками.

Поле давления в основном коллекторе по-прежнему описывается задачей вида (1):

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sigma \frac{\partial p}{\partial r} \right) &= 0, \quad t > 0, \quad r_w < r < R; \\ r = R : p &= 0; \quad r = r_w : \sigma \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q^{(1)}}{2\pi r_w H}; \quad t = 0 : p = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и ниже для простоты мы опускаем индекс «(1)», если это не вызывает недоумений. Пусть линза занимает область  $D$  произвольной формы с границей  $\Sigma$  в трехмерном пространстве, причем ее объем  $|D|$  равен  $V$ . Задача пьезопроводности в линзе имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} &= \nabla \left( \sigma^{(2)} \nabla p^{(2)} \right), \quad x, y, z \in D, \quad t > 0; \\ t = 0 : p^{(2)} &= p_0^{(2)}(x, y, z); \quad \sigma^{(2)} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_w} = \frac{Q^{(2)}}{2\pi r_w H^{(2)}}; \quad \sigma^{(2)} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\Sigma_w$  – боковая поверхность части ствола вертикальной скважины, погруженной в линзу;  $H^{(2)}$  – длина этой части ствола;  $n$  – внешняя к  $\Sigma$  нормаль. Проинтегрируем (15) по области  $D$ . Учитывая изолированность границы  $\Sigma$  и допуская радиальную симметрию течения в окрестности ствола скважины, получим

$$V \beta \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial t} = 2\pi r_w H^{(2)} \sigma^{(2)} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_w}, \quad \langle p \rangle = \frac{1}{V} \int_D p^{(2)} dD. \quad (16)$$

В качестве главного допущения упрощенной модели линзы примем формулу

$$r_w \frac{\partial p^{(2)}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_w} = -\phi (\langle p \rangle - p_w), \quad (17)$$

в которой  $\phi$  – безразмерный форм-фактор, концентрирующий в себе информацию о форме линзы. Очевидно, соотношение (17) может адекватно описывать поток в скважину при постоянном параметре  $\phi$  лишь при сравнительно малых плановых размерах линзы, когда давление в поровом пространстве линзы успевает следовать за изменениями  $p_w$ . Подставив (17) в уравнение (16) и граничные условия (15), получим уравнение для среднего давления в линзе:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial t} = -\frac{2\pi H^{(2)} \kappa^{(2)} \phi}{V} (\langle p \rangle - p_w) \quad (18)$$

и выражение для потока между линзой и скважиной:  $Q^{(2)} = 2\pi H^{(2)} \sigma^{(2)} \phi (\langle p \rangle - p_w)$ . Подставляя эту величину в балансовое уравнение  $Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} + Q^h$ , найдем:

$$Q^{(1)} = Q - Q^h - Q^{(2)} = Q - \frac{\pi r_w^2}{\rho g} \frac{dp_w}{dt} - 2\pi H^{(2)} \sigma^{(2)} \phi (\langle p \rangle - p_w).$$

Если подставить это выражение в (15), получим граничное условие на скважине для уравнения пьезопроводности в пласте:

$$r = r_w : r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_0 q}{2\pi H \sigma} - \frac{H^{(2)} \sigma^{(2)}}{H \sigma} \phi (\langle p \rangle - p) - \frac{r_w^2}{2\rho g H \sigma} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (19)$$

В безразмерных переменных (6) система уравнений (14), (18), (19) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) &= 0, \quad \bar{t} > 0, \quad \bar{r}_w < \bar{r} < \bar{R}; \\ \bar{r} = \bar{R} : \bar{p} &= 0; \quad \bar{t} = 0 : \bar{p} = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\bar{r} = \bar{r}_w : \bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = q(t) - \alpha (\langle \bar{p} \rangle - \bar{p}) - \gamma \frac{d\bar{p}}{d\bar{t}}.$$

$$\frac{\partial \langle \bar{p} \rangle}{\partial \bar{t}} = -K_t (\langle \bar{p} \rangle + \bar{p}_w), \quad \bar{p}_w = \bar{p}(0, t), \quad \langle \bar{p} \rangle(0) = 0. \quad (21)$$

Здесь

$$K_t = \phi \frac{t_0}{t^{(2)}}, \quad t^{(2)} = \frac{V \mu^{(2)} \beta^{(2)}}{2\pi k^{(2)} H^{(2)}}, \quad \alpha = \phi \frac{H^{(2)}}{K_\mu H}. \quad (22)$$

Параметры  $\bar{r}_w$ ,  $\bar{R}$ ,  $\gamma$  в задаче (20)–(22) вычисляются по формулам (6), в которых следует задать размеры и фильтрационные свойства основного коллектора. Безразмерные коэффициенты  $K_t$ ,  $\alpha$  в (22) характеризуют линзу и вычисляются через ее объем  $V$ , относительную вязкость  $K_\mu$  и форм-фактор  $\phi$ , который следует рассматривать как идентификационный параметр модели.

Оценку форм-фактора можно получить, задавшись конкретной геометрией линзы и решив соответствующую модельную задачу; по этому решению  $p$  можно подсчитать среднее и производную в (17), а значит, и  $\phi$ . Ниже приводится оценка форм-фактора  $\phi$  для замкнутого резервуара в виде цилиндра радиуса  $R^{(2)}$



и высотой  $H^{(2)}$ . Безразмерное давление  $p^{(2)}$  в линзе определяется путем решения задачи (8)–(10). Применяя к ней преобразование Лапласа с параметром  $s$ , в изображениях получим задачу

$$K_\mu s p = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dp}{dr}, \quad p(r_w) = p_w(s), \quad \frac{dp}{dr}(R) = 0. \quad (23)$$

В рассматриваемой задаче характерное время изменения давления на скважине много больше временного масштаба  $K_\mu R^2$  перераспределения давления в линзе. Поэтому в задаче (23)  $s$  можно считать малым параметром. Отыскивая  $p$  в виде асимптотического ряда  $p(s) = p_0 + s p_1 + \dots$ , получим, что  $p_0 = p_w$ , а  $p_1$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dp_1}{dr} = K_\mu p_w, \quad p_1(r_w) = 0, \quad \frac{dp_1}{dr}(R) = 0. \quad (24)$$

Интегрируя (24), при  $r_w \ll R$  найдем:

$$r \frac{dp_1}{dr} \Big|_{r=r_w} = \frac{p_w K_\mu R^2}{2}, \quad \langle p_1 \rangle = \frac{p_w K_\mu R^2}{2} \left( \ln \frac{R}{r_w} - \frac{3}{4} \right).$$

Поскольку с точностью  $O(s^2)$  можно записать  $\langle p \rangle = p_w + s \langle p_1 \rangle$ ,  $p' = s p_1'$ , то

$$r \frac{dp}{dr} \Big|_{r=r_w} = \frac{p_w K_\mu}{2} s R^2, \quad \langle p \rangle - p_w = \frac{p_w K_\mu}{2} s R^2 \left( \ln \frac{R}{r_w} - \frac{3}{4} \right) = \left( \ln \frac{R}{r_w} - \frac{3}{4} \right) r \frac{dp}{dr} \Big|_{r=r_w}.$$

Сравнивая полученную формулу с определением (17), находим форм-фактор для цилиндрической линзы:

$$\phi = \left( \ln \frac{R}{r_w} - \frac{3}{4} \right)^{-1}. \quad (25)$$

Для тестирования приближенной модели (20)–(22) вычислим значения форм-фактора (25), объема цилиндрической линзы  $V = \pi (R^{(2)})^2 H^{(2)}$  и безразмерных коэффициентов  $K_t$ ,  $\alpha$  для рассмотренной ранее реальной залежи и скважины 5421 Черемховского месторождения. Проведем расчет КВД и сравним полученные при различных  $K_\mu$  кривые с экспериментальными данными и расчетами по полной модели (7)–(11) (рис. 5). При значениях  $K_\mu$  порядка единицы (см. кривые а) проявляются некоторые различия в КВД, полученных по полной и упрощенной моделям. При малых значениях  $K_\mu$  наблюдается полное совпадение результатов. Это объясняется тем, что временной масштаб  $t^{(2)}$  перераспределения давления в линзе прямо пропорционален относительной вязкости заполняющего ее флюида, см. (22). Поэтому положенная в основу упрощенной модели гипотеза о малости отношения  $t^{(2)}/t_0$  выполняется все более точно с уменьшением  $K_\mu$ .

### Заключение

В статье предложены две модели гидродинамического взаимодействия залежи высоковязкой нефти с замкнутым резервуаром. Они различаются степенью детализации процессов перераспределения давления в линзе. Обе модели адекватно описывают наблюдаемые аномальные КВД на реальных залежах высоковязкой нефти. В условиях недостатка информации о форме и структуре изолированных резервуаров предпочтительнее выглядит упрощенный подход, учитывающий лишь

интегральные характеристики линз. В наибольшей степени это относится к случаю, когда скважина вскрывает не одну, а несколько линз с различными характеристиками. Решение такой задачи в полной постановке предполагает, во-первых, наличие данных по каждой линзе в отдельности, а, во-вторых, сопровождается соответствующим увеличением числа определяющих уравнений. Упрощенная модель позволяет ограничиться здесь идентификацией двух параметров: единственного форм-фактора и суммарного объема линз.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00548-а).

### Summary

*M.Yu. Garnyshev, A.G. Egorov, A.B. Mazo. Modeling of Hydrodynamical Interaction between High-viscosity Oil Stratum and Closed Reservoir.*

Mathematical models of hydrodynamical interaction between high-viscosity oil stratum and closed reservoir are suggested. Close agreement of theoretical pressure build-up curves with abnormal experimental ones is achieved for several fields of Volga-Ural oil-and-gas province.

**Key words:** mathematical modeling, seepage theory, complex reservoir, high-viscosity oil, closed reservoir, pressure build-up curves.

### Литература

1. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений. – М.: Недра, 1998. – 365 с.
2. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
3. Р. Эрлагер мл. Гидродинамические методы исследования скважин – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2006. – 512 с.
4. Нефедов Н.В., Калмыков А.В., Егоров А.Г., Мазо А.Б. Об аномальных кривых восстановления забойного давления в сложнопостроенных залежах высоковязких нефтей на примере месторождений НГДУ «ТатРИТЭКнефть» // Нефт. хоз-во. – 2009. – № 3. – С. 37-39.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
6. Чекалин А.Н., Кудрявцев Г.В., Михайлов В.В. Исследование двух- и трехкомпонентной фильтрации в нефтяных пластах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 148 с.

Поступила в редакцию  
18.03.09

---

**Гарнышев Марат Юрьевич** – аспирант кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

E-mail: *Marat.Garnyshev@ksu.ru*

**Егоров Андрей Геннадьевич** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

E-mail: *Andrey.Egorov@ksu.ru*

**Мазо Александр Бенцианович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

E-mail: *amazo@ksu.ru*